数理解析研究所講究録 1280 巻 2002 年 1-10

$\bar{\partial}$-法と佐藤理論との関係について

東京大学大学院数理科学研究科　　ウィロックス・ラルフ
(Ralph Willox*)
Graduate School of Mathematical Sciences,
University of Tokyo.

1　はじめに

普通 $\bar{\partial}$-法（"D-bar method"）と言えば、可積分系の初期値問題、或いは逆散乱法に関する手法が頭に浮かぶくだろう [1, 2]。しかし、逆散乱法との関連はそれとし、$\bar{\partial}$-法は、やはり可積分系に対する direct methods（直接法）においても非常に有効な手法となること [3] はあまり知られていないと思う。一方、佐藤理論は大概可積分系における様々な直接法と一番深い関連がある理論だと思われている [4, 5]。さらに、最近 [6]、佐藤理論は「双線形法」や「Bäcklund 変換」か「Darboux 変換」等の直接法に基づく理論 [7] であるばかりではなく、佐藤理論に現れる τ 関数に対する初期値問題の解決も佐藤理論の枠組みの中で可能であることも明らかになった 。

$\bar{\partial}$-法と佐藤理論、或いは佐藤理論と深い関係を持つ双線形法の主な特徴をリストアップすると、

$\bar{\partial}$-法：
- 複素変数の線型方程式の構成から、非線型可積分系が得られる
- それらの解を直接構成することが可能である
- 非線型方程式に対する初期値問題が解ける

佐藤理論：
- Grassmannian や Lie 代数に関する線形構造によって非線型可積分系が得られる
- それらの双線形方程式を満たす τ 函数が得られる
- τ 函数に対する初期値問題の解決が可能である

この２つの方法は互いにライバルのように見えてしまう。が、本稿で唱えたいのは、上述の方法は、直接法として、ライバルではなくほぼ同じということである。$\bar{\partial}$-法から導かれる KP ヒエラルキーの eigenfunction は KP の双線形恒等式を満たすことは以前にも知られていた [8]。しかし、本稿で示す、逆に佐藤理論では $\bar{\partial}$-法の特徴化が実現できることであるとか、初期値問題という点では τ 函数に基づく解決方法の方が有効であることは、おそらくこれまで気づかれなかったことと思う。まず、$\bar{\partial}$-法の要点を紹介しよう。

---

*Postdoctoral Fellow at the Fund for Scientific Research (FWO), Flanders (Belgium) ; Dienst Theoretische Natuurkunde, Free University of Brussels (V.U.B.), Belgium.

2 $\bar{\partial}$-法

$F(z,\bar{z}) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ を 複素函数として、次の恒等式が $\bar{\partial}$-法の要となる。

$$F(z_0,\bar{z}_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{F(z,\bar{z})}{z-z_0}\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{(\partial_{\bar{z}}F)}{z-z_0}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}, \quad (z_0 \in D) \tag{1}$$

（D は $\mathbb{C}$ の open set 、$F \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$ という制約が標準的である [9]。が、(1) を超函数の恒等式の意味と取ると、殆どすべての複素函数への拡張もできる [1, 3]。以下では、この意味で (1) 式を理解することにする。）上記の複素平面上の積分を一般的な $\mathbb{R}^2$ 上の積分とすれば、

$$\iint_{D\in\mathbb{C}} f(z,\bar{z})\ \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z} \ = -2i\iint_{D\in\mathbb{R}^2} f(x+iy,x-iy)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

という関係式が書ける。そして、よく知られているように $F(z,\bar{z})$ が $D \subseteq \mathbb{C}$ で 解析函数である場合には、$F(z)$ の $\bar{\partial}$-微分 (すなわち : $\bar{\partial}F(z,\bar{z}) := \partial_{\bar{z}}F(z,\bar{z})$) が 零になり、上述の公式 (1) が古典的な Cauchy の積分公式になる。

$$\bar{\partial}F(z,\bar{z}) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(z_0,\bar{z}_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{F(z,\bar{z})}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

それで、(1) 式は Cauchy の積分公式の非解析函数への拡張であることが分かる。さらに、$\bar{\partial}F(z,\bar{z})$ は $F(z,\bar{z})$ の "departure from analiticity" （解析性からのずれ）とい特徴を計る量であることも判る。

$\bar{\partial}$-問題とは、$F(z,\bar{z})$ の $\bar{\partial}$-微分が複素平面全体で与えられたとき、適当な漸近条件を満たす $F(z,\bar{z})$ を再構成することである。例えば、一番一般的な $\bar{\partial}$-問題とは、$R(k,\bar{k};z,\bar{z})$ という kernel によって、$F(z,\bar{z})$ の $\bar{\partial}$-微分が積分で定義されている次の非局所的な $\bar{\partial}$-問題である。

$$\bar{\partial}F(z,\bar{z}) = \iint_{\mathbb{C}} R(k,\bar{k};z,\bar{z})\ F(k,\bar{k})\ \mathrm{d}k\wedge\mathrm{d}\bar{k} \tag{2}$$

上記の積分方程式 (2) を $\bar{\partial}$-方程式と呼ぶ。恒等式 (1) により、漸近条件 $\lim\limits_{|z|\to\infty} F(z,\bar{z}) = 1$ を満たす $F(z,\bar{z})$ は次の積分方程式の解となる。

$$F(k_0,\bar{k}_0) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}}{z-k_0}\iint_{\mathbb{C}} R(k,\bar{k};z,\bar{z})\ F(k,\bar{k})\ \mathrm{d}k\wedge\mathrm{d}\bar{k} \tag{3}$$

$\bar{\partial}$-問題においては、この積分方程式の解がユニークである限り、$R(k,\bar{k};z,\bar{z})$ は自由に選べるということに注意する。また、その一意性によって、同じ $\bar{\partial}$-方程式 (2) を満たし、漸近的に消える函数は完全に零になることも明らかになる。

3 KP に関する $\bar{\partial}$-問題

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ をパラメータとして kernel $R(k, \bar{k}; z, \bar{z})$ に導入すると

$$R(k, \bar{k}; z, \bar{z}; \mathbf{x}) := \ e^{\xi_k(\mathbf{x})}\ R_0(k, \bar{k}; z, \bar{z})\ e^{-\xi_z(\mathbf{x})},$$
$$\xi_\lambda(\mathbf{x}) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda^n,$$

パラメータ $\mathbf{x}$ を含む $\bar{\partial}$-方程式が現れる。

$$\bar{\partial}F(z, \bar{z}; \mathbf{x}) = \iint\limits_{\mathbb{C}} e^{\xi_k(\mathbf{x})}\ R_0(k, \bar{k}; z, \bar{z})\ e^{-\xi_z(\mathbf{x})}\ F(k, \bar{k}; \mathbf{x})\ \mathrm{d}k \wedge \mathrm{d}\bar{k} \tag{4}$$

その結果、(3) から得られた積分方程式

$$\begin{aligned} F(k_0, \bar{k}_0; \mathbf{x}) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}}{z - k_0} \iint\limits_{\mathbb{C}} \ e^{\xi_k(\mathbf{x})}\ R_0(k, \bar{k}; z, \bar{z})\ e^{-\xi_z(\mathbf{x})} \\ \times\ F(k, \bar{k}; \mathbf{x})\ \mathrm{d}k \wedge \mathrm{d}\bar{k} \end{aligned} \tag{5}$$

が $\mathbf{x}$ によって発展する KP ヒエラルキーを記述する。その記述は $\bar{\partial}$-dressing と呼ばれている手法による [3]。

$\bar{\partial}$-dressing

(4) 式に相当する $\bar{\partial}$-問題の一意性を用いて KP ヒエラルキーの Zakharov-Shabat (ZS) 系が得られる。まず、

$$\mathfrak{L}_M := \sum_{m=\{n_i\}} U_m \prod_{i=1}^{\infty} \partial_{x_i}^{n_i}$$

という作用素を定義する。($M = \max\limits_{m=\{n_i\}} \{\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\ n_k\}$ は $\mathfrak{L}_M$ の order を表す。)

$\mathfrak{L}_M[F(z, \bar{z})]$ が $\bar{\partial}$-方程式 (4) を満たすとすると、(4) の解がユニークであるので、

$$\lim_{z \to \infty} \mathfrak{L}[F(z, \bar{z})] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{L}_M[F(z, \bar{z})] = 0,$$

という漸近的な特性により、 $F(z, \bar{z})$ が満たす線形方程式を得る。ここで $F(z, \bar{z})$ を漸近級数で表し、

$$F(z, \bar{z}; \mathbf{x}) = 1 + F_1 z^{-1} + F_2 z^{-2} + \mathcal{O}(z^{-3})$$

$\mathfrak{L}_M[F(z, \bar{z})]$ の "漸近的に発散する" z^n $(n \geq 0)$ の係数を 0 とおくと、各 order M に表れる作用素 $\mathfrak{L}_M$ は KP 方程式(或は KP ヒエラルキー)に付随する ZS 系に属する。

例えば、

$$\mathfrak{L}_2 = \partial_{x_2} - \partial_{x_1}^2 - 2z\partial_{x_1} - 2u \qquad (u := -(F_1)_{x_1})$$
$$\mathfrak{L}_3 = \partial_{x_3} - \partial_{x_1}^3 - 3z\partial_{x_1}^2 - 3(u+z^2)\partial_{x_1} - \frac{3}{2}(u_{x_1} + w + 2zu) \quad (w_{x_1} = u_{x_2})$$
$$\vdots$$

$\mathfrak{L}_2$ と $\mathfrak{L}_3$ は KP 方程式の ZS 系となる。

$$[\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3]_- = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (4u_{x_3} - u_{3x_1} - 12uu_{x_1})_{x_1} - 3u_{2x_2} = 0 \tag{6}$$

さらに、KP 方程式 (6) の解も $F(k,\bar{k};\mathbf{x})$ で表現されている。

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi i}\,\partial_{x_1} \iint_{\mathbb{C}} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \iint_{\mathbb{C}} \mathrm{d}k \wedge \mathrm{d}\bar{k}\;\; e^{\xi_k(\mathbf{x})}\, R_0(k,\bar{k};z,\bar{z})\; e^{-\xi_z(\mathbf{x})}\; F(k,\bar{k};\mathbf{x}) \tag{7}$$

KP 方程式の解：直接構成

(7) 式に現れる kernel $R_0(k,\bar{k};z,\bar{z})$ が separable であれば、

$$R_0(k,\bar{k};z,\bar{z}) \equiv \sum_{\ell=1}^{N} h_\ell(k)\; h_\ell^*(z)$$

KP の解 $u(\mathbf{x})$ は次の $N \times N$ 行列式を用いた形で与えられる。

$$u(\mathbf{x}) = \partial_{x_1}^2 \log\left(\det[I - A]\right)$$

$$(A)_{m\ell} = \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \mathrm{d}k \wedge \mathrm{d}\bar{k}\; h_m(k)\; e^{\xi_k(\mathbf{x})} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}}{z-k} h_\ell^*(z) e^{-\xi_z(\mathbf{x})}$$

実際には、$R_0(k,\bar{k};z,\bar{z})$ は tempered distribution に限られている。例えば、delta 函数で表現される

$$R_0(k,\bar{k};z,\bar{z}) = \frac{\pi}{2i}\;\delta(k-p)\delta(z-q) \tag{8}$$

は KP の 1-ソリトン解に対応する kernel である。

$$u(\mathbf{x}) = \partial_{x_1}^2 \log\left(1 + \frac{e^{\xi_p(\mathbf{x}) - \xi_q(\mathbf{x})}}{p-q}\right)$$

kernel の構成：初期値問題

よく知られているように、初期値問題では, KPI と KPII という２つの KP 方程式を区別しなければならない。$U(x,y,t) = -u(-ix_1, \gamma x_2, -\frac{i}{4}x_3)$ の変換による方程式は、

$$(U_t + U_{3x} + 12UU_x)_x + 3\gamma^2 U_{2y} = 0$$

$\gamma = i$ というケースならば KPI と呼ばれ , $\gamma = -1$ なら KPII と呼ばれている。

漸近的に消える potential U (すなわち、$\lim_{x^2+y^2\to\infty} U = 0$) の場合には、逆散乱法によって KP 方程式の基礎にある線型方程式

$$\mathfrak{L}_2[F] = \gamma F_y + F_{2x} + 2i\lambda F_x + 2UF = 0 \tag{9}$$

から $\bar{\partial}$-問題の kernel を構成することが可能である [1, 2, 3]。

KPII の場合には、(9) 式が heat equation のような方程式になるので、その方程式の解 $F(z,\bar{z})$ は至る所で非解析になってしまう。また、 逆散乱法が与える kernel は

$$R_0(k,\bar{k};z,\bar{z}) \equiv R_0(z,\bar{z})\ \delta(z+\bar{k})$$

という形になり、この場合には次の局所的な $\bar{\partial}$-問題が得られる。

$$\bar{\partial}F(z,\bar{z}) = R(z,\bar{z})\ F(-\bar{z},z)$$

ここで $R(z,\bar{z})$ は、$R(z,\bar{z}) := -2iR_0(z,\bar{z})\ e^{\xi_{-\bar{z}}(\mathbf{x})-\xi_z(\mathbf{x})}$ で定義されている。

KPI の場合には、(9) 式が time dependent Schrödinger equation のような方程式になり、$F(z,\bar{z})$ は、 $\mathrm{Im}(z) = 0$ で不連続であるので、 sectionally meromorphic と呼ばれている函数である。それで、逆散乱法が与える kernel は

$$R_0(k,\bar{k};z,\bar{z}) = R_0(k;z)\ \delta(k-\bar{k})\delta(z-\bar{z})$$

であり、その結果、KPI に付随する（非局所的な） Riemann-Hilbert 問題 [2] が導き出せる [3]。

$$F^+(\lambda) - F^-(\lambda) = \ e^{-\xi_\lambda(\mathbf{x})} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k\ e^{\xi_k(\mathbf{x})} R_0(k;\lambda) F^-(k), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

一方、KPI や KPII を問わず、 $\lim_{x^2+y^2\to\infty} U = 0$ という漸近条件を満たさない解も存在し、逆散乱法では 全ての解の kernel を構成することは不可能である。例えば、KP 方程式の (line) soliton はこういう反例になる。

双線形法との関係

$F(z,\bar{z};\mathbf{x})$ の代わりに $\psi_z(\mathbf{x}) = F(z,\bar{z};\mathbf{x})\, e^{\xi_z(\mathbf{x})}$ を代入すると $\bar{\partial}$-方程式 (4) の形がより易くなる。

$$\bar{\partial}\psi_z(\mathbf{x}) = \iint_{\mathbf{C}} R_0(k,\bar{k};z,\bar{z})\psi_k(\mathbf{x})\mathrm{d}k \wedge \mathrm{d}\bar{k}$$

Riesz-Schauder 理論 や Fredholm の交代定理の結果に基づくと、上記の積分方程式の dual が存在し、

$$\bar{\partial}\psi_z^*(\mathbf{x}) = -\iint_{\mathbf{C}} R_0(z,\bar{z};k,\bar{k})\psi_k^*(\mathbf{x})\mathrm{d}k \wedge \mathrm{d}\bar{k}$$

この dual 方程式の解もユニークである。

従って、$\bar{\partial}$-方程式によって $\psi_z(\mathbf{x})$ と $\psi_z^*(\mathbf{x}')$ が KP の双線形恒等式 [10] を満たすことが分かる [8]。（$\mathcal{C}_z$ という積分路は $z \approx \infty$ を周回している。）

$$\iint_{\mathbf{C}} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\ \bar{\partial}\left(\psi_z(\mathbf{x})\psi_z^*(\mathbf{x}')\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \oint_{\mathcal{C}_z} dz\ \psi_z(\mathbf{x})\psi_z^*(\mathbf{x}') = 0 \qquad \forall \mathbf{x},\mathbf{x}'$$

それで、$\psi_z(\mathbf{x})$ は（又は $\psi_z^*(\mathbf{x})$）佐藤理論における wave function（又は adjoint wave function）であると思っても良い。この結果を first step として、以下では $\bar{\partial}$-法と佐藤理論とのより深い関係を求める。

4 佐藤理論との関係

KP の τ 函数は次の積分方程式を満たすことが証明できる [6]。

$$\tau(\mathbf{x}-\boldsymbol{\varepsilon}[k]) = \tau(\mathbf{x}) + \oint_{\mathcal{C}_\lambda} \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_\mu} \frac{\mathrm{d}\mu}{2\pi i}\ \frac{e^{-\xi_\mu(\mathbf{x})}}{\mu - k}\ h(\lambda,\mu)\ e^{\xi_\lambda(\mathbf{x})}\ \tau(\mathbf{x}-\boldsymbol{\varepsilon}[\lambda]) \qquad (10)$$

(いつもの通り、τ に現れる座標の shift は $\boldsymbol{\varepsilon}[k] = (1/k, 1/(2k^2), 1/(3k^3), \ldots)$ $(k \approx \infty)$ と定義されている。$\mathcal{C}_\lambda$ と $\mathcal{C}_\mu$ という曲線は $\lambda, \mu, k \approx \infty$ を周回している。)

この積分方程式に現れる kernel $h(\lambda,\mu)$ の一つのクラスは、τ 函数を用いて explicit に表せる。

$$h(\lambda,\mu;\mathbf{x}') \equiv \frac{\tau(\mathbf{x}'-\boldsymbol{\varepsilon}[\mu]+\boldsymbol{\varepsilon}[\lambda])\ e^{\xi_\mu(\mathbf{x}')-\xi_\lambda(\mathbf{x}')}}{(\mu-\lambda)\ \tau(\mathbf{x}')} - \frac{1}{\mu-\lambda} \qquad (11)$$

この kernel のパラメータ依存性について注意が必要である。$h(\lambda,\mu;\mathbf{x}')$ が $\mathbf{x}'$ というパラメータを持つので、上記の方程式 (10) の解も同じパラメータに依存するように思える。ところが、

$$[\tau(\mathbf{x}-\boldsymbol{\varepsilon}[k];\mathbf{x}')/\tau(\mathbf{x};\mathbf{x}')]_{x'_n}=0 \quad\Rightarrow\quad \tau(\mathbf{x};\mathbf{x}')=G(\mathbf{x}')\times\tilde{\tau}(\mathbf{x})$$

という関係式が成立するので、$\tau(\mathbf{x})$ はいつも $\mathbf{x}'$ に依存していない τ 函数の定数倍になり、$\tau(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}'$ に依存していないと思っても良い。

一般的には、$\bar{\partial}$-法と同様に (10) に現れる kernel $h(\lambda,\mu)$ が separable であれば

$$h(\lambda,\mu)=\sum_{\ell=1}^{\infty}h_\ell(\lambda)\ h_\ell^*(\mu),$$

τ 函数は直接に行列式で表示できる。

$$\tau(\mathbf{x})=\det[I-A]$$

$$A_{nm}=\oint_{C_\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi i}\ h_n(\lambda)\ e^{\xi_\lambda(\mathbf{x})}\oint_{C_\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{2\pi i}\ \frac{h_m^*(\mu)\ e^{-\xi_\mu(\mathbf{x})}}{\mu-\lambda}$$

従って、この τ 函数は fermion operator ψ_j,ψ_j^* $(j\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2})$ [10] で表現できる。

$$\tau(\mathbf{x})=\langle vac|e^{H(\mathbf{x})}\prod_{j=1}^{\infty}(1+\Phi_j\Phi_j^*)|vac\rangle \tag{12}$$

$$\Phi_j:=\oint_{C_\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi i}\ h_j(\lambda)\ \psi_j,\qquad \Phi_j^*:=\oint_{C_\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{2\pi i}\ h_j^*(\mu)\ \psi_j^* \tag{13}$$

$$[\psi_i,\psi_j]_+=[\psi_i^*,\psi_j^*]_+=0,\ [\psi_i,\psi_j^*]_+=\delta_{i+j,0}\ ;\qquad H(\mathbf{x}):=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\sum_j\psi_{-n}\psi_{j+n}^*$$

しかし、$g=\prod_{j=1}^{\infty}(1+\Phi_j\Phi_j^*)$ は一般には $\overline{GL}(\infty)$ の要素ではない。けれども、$h(\lambda,\mu,\mathbf{x}'=\mathbf{0})$ に対する g は いつも $\overline{GL}(\infty)$ に含まれている。 その場合には $g=e^X$ と表現できる $X\in\overline{\mathfrak{gl}}(\infty)$ が存在しているわけである。

一方、上述の kernel のクラス (11) と異なる kernel も存在している。$\bar{\partial}$-法との関係を用いてその kernel の構成を明らかにしよう。

$\bar{\partial}$-法に戻ると

佐藤理論から導き出した積分方程式 (10) は、 $\bar{\partial}$-法における積分方程式 (5) において、次のようにおいたものである。

$$F(k_0, \bar{k}_0) = \frac{\tau(\mathbf{x} - \varepsilon[k_0])}{\tau(\mathbf{x})},$$

$$R_0(k, \bar{k}; z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i}\, h(\lambda, \mu)\, \delta_{\mathcal{C}_\mu}(z)\delta_{\mathcal{C}_\lambda}(k) \tag{14}$$

ここで $\mathcal{C}_\lambda$ と $\mathcal{C}_\mu$ は (10) 式における曲線である。そして、$\delta_{\mathcal{C}_s}(z)$ は、ある曲線 $\mathcal{C}_s$ によって

$$\iint_{\mathbf{C}} f(z, \bar{z})\, \delta_{\mathcal{C}_s}(z)\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \equiv \oint_{\mathcal{C}_s} f(s, \bar{s})\, \mathrm{d}s$$

で定義されている。

従って、佐藤理論に対応する $\bar{\partial}$-方程式は

$$\bar{\partial}F(z, \bar{z}) = \oint_{\mathcal{C}_\lambda} \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi i}\, e^{\xi_\lambda(\mathbf{x})}\, F(\lambda, \bar{\lambda})\, h(\lambda, \mu)\, e^{-\xi_z(\mathbf{x})}\, \delta_{\mathcal{C}_\mu}(z) \tag{15}$$

という形となる。上述の関係を用いて、$\bar{\partial}$-法における kernel $R_0(k, \bar{k}; z, \bar{z})$ から (10) 式に対応する kernel $h(\lambda, \mu)$ が簡単に得られることがすぐ分かる。そのためには、

$$\begin{aligned} \delta(k - p) &= -\frac{1}{\pi}\, \delta(p/\lambda) \times \delta_{\mathcal{C}_\lambda}(k), \\ \mathrm{Res}_{\lambda=\infty}&[\delta(p/\lambda)\ f(\lambda, \bar{\lambda})] \equiv f(p, \bar{p}) \end{aligned}$$

という超函数の同一視が有効である。

例えば、KP の１ーソリトン解に対応する kernel (8) を書き直し、

$$\begin{aligned} R_0(k, \bar{k}; z, \bar{z}) &= \frac{\pi}{2i}\, \delta(k - p)\delta(z - q) \\ &\equiv \frac{1}{2\pi i}\, \delta(p/\lambda)\delta(q/\mu) \times \delta_{\mathcal{C}_\lambda}(k)\delta_{\mathcal{C}_\mu}(z), \end{aligned}$$

(14) を用いると、その１ーソリトン解に対応する kernel $h(\lambda, \mu)$ が導き出せる。

$$h(\lambda, \mu) \equiv \delta(p/\lambda)\delta(q/\mu)$$

そして、この kernel に対応する τ 函数は (12) と (13) 式から計算ができる。

$$\tau(\mathbf{x}) = \langle vac|e^{H(\mathbf{x})}\left(1+\psi(p)\psi^*(q)\right)|vac\rangle \equiv 1 + \frac{e^{\xi_p(\mathbf{x})-\xi_q(\mathbf{x})}}{p-q}. \tag{16}$$

一方、(11) 式を用いて、この τ 函数から計算ができる kernel $h(\lambda,\mu;\mathbf{x}')$ は 上述の tempered distribution と全く違うので、(11) から得られる kernel は、超函数として、どういうものなのかという問題が生じる。

上記の 1-ソリトン τ 函数を実例として、(16) 式から出発し、佐藤理論から（すなわち、(11) 式から）次の kernel $h^S(\lambda,\mu)$ が得られる。

$$h^S(\lambda,\mu) \equiv h(\lambda,\mu,\mathbf{x}'=\mathbf{0}) = \frac{1}{\tau(\mathbf{0})}\,\frac{1}{\lambda-p}\,\frac{1}{\mu-q} \tag{17}$$

ところが、$F(z,\bar{z}) = \dfrac{\tau(\mathbf{x}-\varepsilon[z])}{\tau(\mathbf{x})}$ の $\bar{\partial}$-微分をとったものと、

$$\bar{\partial}\left(\frac{\tau(\mathbf{x}-\varepsilon[z])}{\tau(\mathbf{x})}\right) = \frac{-\pi e^{\xi_p(\mathbf{x})-\xi_q(\mathbf{x})}}{\tau(\mathbf{x})} \times \delta(z-q),$$

$\bar{\partial}$-方程式 (15) の右辺と

$$\oint_{\mathcal{C}_\lambda} \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi i}\, e^{\xi_\lambda(\mathbf{x})}\, \frac{\tau(\mathbf{x}-\varepsilon[\lambda])}{\tau(\mathbf{x})}\, h^S(\lambda,\mu)\, e^{-\xi_z(\mathbf{x})}\delta_{\mathcal{C}_\mu}(z) = \frac{e^{\xi_p(\mathbf{x})-\xi_z(\mathbf{x})}}{(\mu-q)\tau(\mathbf{x})} \times \delta_{\mathcal{C}_\mu}(z)$$

超函数として比べると、kernel (17) は普通の tempered distribution に対する test 函数空間では $\bar{\partial}$-方程式 (15) を満たさないことが分かる。けれども、$\mathcal{C}_\mu$ 曲線の外部で解析的である test 函数に対しては上記の 2 つの超函数が同一となるので、(17) のような kernel を、例えば Gel'fand [11] による $\mathbf{Z}'$ クラスの generalized function と解釈しても良い。

5 終わりに

ソリトン解などのように、従来具体的に逆散乱法で解かれてきたケースでは、（つまり tempered distribution に相当する kernel である場合には）、$\bar{\partial}$-法と佐藤理論は全く同じ結果を与える。（その場合には佐藤理論は $\bar{\partial}$-問題の漸近的な特徴化と同等となる訳である）。さらに、[6] によって佐藤理論から得られる kernel (11) は τ 函数の初期値のみからも得られる。すなわち、τ の x_1 と x_2 に対する発展しか分からなくても $h(\lambda,\mu;\mathbf{x}')$ の構成

$$\tau^0 := \tau(\mathbf{x}'=(x_1',x_2',0,\ldots)) \qquad \Longrightarrow \qquad h^0(\lambda,\mu;\mathbf{x}')$$

ができる。この初期値問題には漸近条件が無いので、双線形法や佐藤理論に基づく初期値問題の解法では、全ての τ 函数、そして KP 方程式の全ての解が得られる。従って、一般の初期値問題を解きたい場合には、τ 函数に対するアプローチの方が有利であることが判る。

参考文献

[1] M.J. Ablowitz and P.A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).

[2] L.-Y. Sung, *Scattering* R. Pike and P. Sabatier (Eds.) (Academic Press, London, 2002) p 1717–1728.

[3] B. Konopelchenko, *Solitons in Multidimensions* (World Scientific, Singapore, 1993).

[4] M. Sato, 京都大学数理解析研究所 講究録 **439** (1981) 30–46.

[5] Y. Ohta, J. Satsuma, D. Takahashi and T. Tokihiro, Prog. Theor. Phys. Suppl. **94** (1988) 210–241.

[6] R. Willox, 京都大学数理解析研究所 講究録 **1170** (2000) 111–118.

[7] R. Willox, T. Tokihiro, I. Loris and J. Satsuma, Inverse Problems **14** (1998) 745–762.

[8] R. Carroll and B. Konopelchenko, Lett. Math. Phys. **28** (1993) 307–319.

[9] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables* (D. Van Nostrand Company, Princeton, 1966).

[10] E. Date, M. Kashiwara, M. Jimbo and T. Miwa, *Proceedings of RIMS symposium on non-linear integrable systems – Classical theory and quantum theory* M. Jimbo and T. Miwa (Eds.) (World Scientific, Singapore, 1983) p 39–119.

[11] I.M. Gel'fand and G.E. Shilov, *Generalized Functions, Vol. 1* (Academic Press, New York, 1964).